Nyuton binomi yordamida darajali yig‘indilar uchun rekurrent formulani keltirib chiqarish va tahlil qilish

Boymurotov B. – Navoiy davlat universiteti, talaba

Ashurova D.N. - Navoiy davlat universiteti, p.f.f.d., dotsent

Annotatsiya. Ushbu maqolada ketma-ket natural sonlarning ixtiyoriy p-darajali yig‘indilarini hisoblash uchun universal rekurrent formula Nyuton binomi va teleskopik yig‘indilar usuli yordamida keltirib chiqarilgan. Maqolada dastlab $p = 1,2,3$ holatlari uchun mos formulalarning kelib chiqishi batafsil tahlil qilinib, so‘ngra ixtiyoriy natural p daraja uchun umumiy qonuniyat isbotlangan. Keltirilgan universal formula matematik modellashtirish va dasturlash algoritmlarida hisoblash samaradorligini oshirishga xizmat qiladi.

Kalit so‘zlar: natural sonlar yig‘indisi, rekurrent formula, Nyuton binomi, teleskopik yig‘indi, arifmetik progressiya.

Abstract. This article presents a universal recursive formula for calculating the sum of the $p = 1,2,3$ powers of consecutive natural numbers using Newton's binomial theorem and the telescoping sum method. The cases for $p = 1,2,3$ are thoroughly analyzed first, followed by a rigorous proof for any arbitrary natural power p. The derived universal formula can be utilized to optimize computational efficiency in mathematical modeling and algorithmic design.

Keywords: sum of natural numbers, recursive formula, Newton's binomial, telescoping sum, arithmetic progression.

Аннотация. В данной статье выводится универсальная рекуррентная формула для вычисления суммы p – х степеней последовательных натуральных чисел с использованием бинома Ньютона и метода телескопических сумм. Подробно анализируются случаи для $p = 1,2,3$ после чего приводится строгое доказательство для произвольной натуральной степени p. Полученная универсальная формула может быть использована для повышения вычислительной эффективности в математическом моделировании и алгоритмизации.

Ключевые слова: сумма натуральных чисел, рекуррентная формула, бином Ньютона, телескопическая сумма, арифметическая прогрессия.

Matematika inson tafakkurining eng muhim vositalaridan biri bo‘lib, u murakkab jarayonlarni sodda va aniq ifodalash imkonini beradi. Ayniqsa, ketma-ketliklar va ularning yig‘indilarini hisoblash masalalari qadim zamonlardan buyon matematiklar e'tiborida bo‘lib kelgan. Bugungi kunda ham ushbu hisob-kitoblar iqtisodiy modellashtirish, dasturlash algoritmlari, statistik tahlillar va fizik jarayonlarni o‘rganishda fundamental ahamiyat kasb etadi.

Yig‘indilarni hisoblash masalalari ilk bor qadimgi grek va hind matematiklari tomonidan o‘rganilgan bo‘lib, ular sonlar ketma-ketligining umumiy yig‘indisini topish usullarini ishlab chiqishga harakat qilganlar. Bu yo‘nalishda ayniqsa C.Gaussning arifmetik progressiya yig‘indisi bo‘yicha amalga oshirgan ishlari muhim o‘rin tutadi. Keyinchalik Yakobi Bernulli ushbu yig‘indilarni maxsus sonlar (Bernulli sonlari) yordamida ifodalash usulini taklif etdi.

Matematikaning ko‘plab bo‘limlarida natural sonlarning darajali yig‘indilarini hisoblash muhim ahamiyatga ega. Quyidagi ko‘rinishdagi yig‘indilar keng qo‘llanadi:

$$S^k_{n=1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k}$$

Bunday yig‘indilar sonlar nazariyasi, kombinatorika, matematik analiz va algoritmlar nazariyasida uchraydi. Darajali yig‘indilarni hisoblashning samarali usullaridan biri Nyuton binomi formulasi yordamida rekurrent munosabatlar hosil qilishdir.

Ma’lumki, Nyuton binomi formulasi quyidagicha ifodalanadi:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Mazkur formula algebraik ifodalarni yoyish bilan bir qatorda, darajali yig‘indilar orasidagi bog‘lanishlarni aniqlash imkonini ham beradi.

Ko‘p hollarda katta hajmdagi ketma-ket sonlar darajalari yig‘indisini bevosita hisoblash ko‘p vaqt va yuqori hisoblash quvvatini talab qiladi. Shu sababli, ushbu maqolada yig‘indilarni rekurrent usulda tez va samarali hisoblash imkonini beruvchi universal formulaning keltirib chiqarilishi tahlil qilinadi.

Kundalik hayotda ham biz ko‘pincha turli miqdorlarning yig‘indisini hisoblashga duch kelamiz. Masalan, iqtisodiy hisob-kitoblar, dasturlash algoritmlari va fizik modellar aynan yig‘indilar asosida quriladi.

Aytaylik, 1 dan *n* gacha yig‘indini topish berilgan bo‘lsin. Yig‘indini arifmetik progressiyadagi elementar formula yordamida keltirib chiqarish mumkin:

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

Shuningdek, 1 dan *n* gacha sonlar kvadratlari yig‘indisi berilgan bo‘lsa, quyidagi formula yordamida topish mumkin:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+ n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (2)$$

Agar 1 dan *n* gacha sonlarning kublari yig‘indisi berilgan bo‘lsa, u holda quyidagi formula o‘rinli:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \frac{(n(n+1))^2}{4} \quad (3)$$

Yuqorida keltirilgan formulani bitta yuqori daraja orqali keltirib chiqarish mumkin.

Buning uchun (1) ifodani A_1 deb, (2) ifodani A_2 deb, (3) ni A_3 deb belgilab, A_3 ni topiladi:

$$1^4 = (1+0)^4 = 1^4 + 1^3*4*0^1 + 1^2*6*0^2 + 1^1*4*0^3 + 0^4$$

$$2^4 = (1+1)^4 = 1^4 + 1^3*4*1^1 + 1^2*6*1^2 + 1^1*4*1^3 + 1^4$$

$$3^4 = (1+2)^4 = 1^4 + 1^3*4*2^1 + 1^2*6*2^2 + 1^1*4*2^3 + 2^4$$

$$4^4 = (1+3)^4 = 1^4 + 1^3*4*3^1 + 1^2*6*3^2 + 1^1*4*3^3 + 3^4$$

- - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - -

$$n^4 = (1+n-1)^4 = 1^4 + 1^3*4*(n-1)^1 + \ldots + 1^1*4*(n-1)^3 + (n-1)^4$$

Yuqoridagilarni qo‘shib, quyidagiga ega bo‘linadi:

$$1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 = n + 4 * (0 + 1 + 2 + \ldots + n - 1) + 6 * (0^2 + 1^2 + \ldots + (n-1)^2) + 4 * (0^3 + 1^3 + \ldots + (n-1)^3) + 1^4 + 2^4 + \ldots + (n-1)^4$$

(4)

(4) ifodadagi tenglikning ikkala tomonidagi bir xil sonlarni qisqartirib, 4, 6, 4 koeffitsiyentli ifodalarda hosil bo‘lgan sonlarni (1) va (2) tenglamalarga qo‘yib hisoblansa, quyidagi tenglik hosil bo‘ladi:

$$n^4 = n + 4 * \frac{0+n-1}{2} * n + 6 * \frac{(n-1)*(2n-1)*n}{2} + 4 * (A_3 - n^3)$$

(5)

$$n^4 + 4n^3 = 2n^2 - n + 2n^3 - n^2 - 2n^2 + n + 4A_3$$

(6)

(6) ifodadan A_3 topiladi:

$$A_3 = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$$

(7)

$$A_3 = (\frac{n*(n+1)}{2})^2$$

(8)

Hosil bo‘lgan (8) ifoda 1 dan *n* gacha sonlarning kublari yig‘indisini topish formulasini ifodalaydi.

Bu keltirib chiqarish usullaridan foydalangan holda umumiy formula keltirib chiqish mumkin. Masalan,

$$A_p = 1^p + 2^p + \ldots + n^p$$

bu yerda *p* soni istalgan natural son (daraja) bo‘la oladi, shu bilan birga *n* soni ham istalgan natural son bo‘la oladi.

Bu yerda A_p ifoda topish jarayoni quyidagicha bo‘ladi.

$$1^{p+1} = C_{p+1}^0 * 1^{p+1} + C_{p+1}^1 * 1^p * 0^1 + \ldots + C_{p+1}^{p+1} * 1^0 * 0^{p+1}$$

$$2^{p+1} = C_{p+1}^0 * 1^{p+1} + C_{p+1}^1 * 1^p * 1^1 + \ldots + C_{p+1}^{p+1} * 1^0 * 1^{p+1}$$

$$3^{p+1} = C_{p+1}^0 * 1^{p+1} + C_{p+1}^1 * 1^p * 2^1 + \ldots + C_{p+1}^{p+1} * 1^0 * 2^{p+1}$$

- - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - -

$$n^{p+1} = C_{p+1}^0 * 1^{p+1} + C_{p+1}^1 * 1^p * (n-1)^p + \ldots + C_{p+1}^{p+1} * 1^0 * (n-1)^{p+1}$$

Yuqorida Nyuton binomi yordamida yoyib chiqilgan formulani barchasini yig‘indisini olinsa, quyidagi formula kelib chiqadi:

$$n^{p+1} = n + C_{p+1}^{1} * (A_1 - n) + C_{p+1}^{2} * (A_2 - n^2) + \dots + C_{p+1}^{p} * (A_p - n^p) \quad (9)$$

(9) ifodani soddalashtirib umumiy holatda quyidagi formulani keltirib chiqarish mumkin:

$$(n+1)^{p+1} - (n+1) = C_{p+1}^{1} * A_1 + C_{p+1}^{2} * A_2 + \dots + C_{p+1}^{p} * A_p \quad (10)$$

Hosil bo‘lgan (10) formula istalgan darajali ketma-ket sonlar yig‘indisini topish uchun o‘rinli bo‘ladi. Masalan, *p* soni o‘rniga 1 ni qo‘yib hisoblaganda (1) ifoda hosil bo‘ladi. Agar *p* soni o‘rniga 2 yoki 3 sonini qo‘yib hisoblansa, (2) va (3) ifodalar kelib chiqadi.

Demak, (10) formula darajali yig‘indilar uchun universal formula bo‘lib, hisoblash matematikasining tegishli amaliy masalalarini yechishda muhim dasturilamal bo‘la oladi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati

1. Azlarov T. A., Mansurov H. T. Matematik analiz. 1-qism. – Toshkent: «O‘zbekiston», 2005. – 432 b.
2. Graham R., Knuth D., Patashnik O. Конкретная математика. Основания информатики. – M.: Мир, 2009. – 703 с.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциалного и интегралного исчисления. Том 1. – M.: Физматлит, 2003. – 680 s.
4. Sh. A. Alimov, O. R. Xolmuhamedov, B. E. Xaydarov. Algebra va analiz asoslari. – Toshkent: «O‘qituvchi», 2018.